Лекция 4 Уравнения гидротермодинамики для атмосферных движений в системах координат, связанных с давлением.

Цель: Объяснить причину перехода в систему координат, связанных с давлением, показать вывод уравнений гидротермодинамики р - системе координат, показать преимущества полученных уравнений.

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Метеорологические элементы и точность их измерения. Порядок величин метеорологических элементов и их производных

Под порядком величины какого-либо элемента понимается значение этого элемента в диапазоне всех встречающихся величин этого элемента при округлении нижнего и верхнего пределов значений до ближайшей степени числа 10 в принятой системе единиц. Например, скорость ветра изменяется от 0 до 50 м/с. Поэтому порядок величины скорости ветра составляет $10^0 - 10^1$. Давление воздуха у поверхности земли колеблется от 240 до 1070 мбар. Значения нижнего и верхнего пределов после округления оказывается одинаковым, поэтому давление воздуха на уровни моря имеет порядок 10^2.

Под характерным значением какого-либо элемента или функции будем понимать их среднюю абсолютную или среднюю квадратичную величину, определенную по данным измерениям. Будем обозначать символом O(f). Характерные значения непосредственно измеряемых метеорологических элементов и их производных можно получить путем статистической обработки данных наблюдений. При этом производные заменяются отношением приращения рассматриваемого элемента к приращению времени δt или координат $\delta s(\delta x, \delta y)$, δz.

уравнения гидротермодинамики для крупномасштабных процессов

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + lv,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - lu,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

(*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\gamma_a}{\rho g}\frac{dp}{dt},$$

$$p = \rho RT$$

Уравнения гидротермодинамики для атмосферных движений в системах координат, связанных с давлением.

Координаты в декартовой системе x, y, z, t, в изобарической системе - x_p, y_p, p, t_p. При этом $x = x_p$, $y = y_p$, $t = t_p$, а между p и z существует соотношение или $p=\varphi(z)$, $z=\varphi_1(p)$.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho$$

В качестве функций координат и времени в новой систем координат будут u, v, T, $z=H(x_p, y_p, t_p)$ и функция

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (**)$$

которая является аналогом вертикальной скорости. Производя оценку порядка величин отдельных членов уравнений (*), можно заключить, что $\tau \approx w\frac{\partial p}{\partial z} = -gw\rho$

Чтобы записать систему (*) в изобарической системе координат необходимо произвести замену переменных в дифференциальных уравнений.

Рассмотрим функцию Φ, являющейся функцией четырех переменных, в старой системе $\Phi=\varphi(x, y, z, t)$, в новой – $\Phi=f(x_p, y_p, z_p, t_p)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_p}\frac{\partial t_p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_p}\frac{\partial t_p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_p}\frac{\partial t_p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_p}\frac{\partial t_p}{\partial t}$$

В результате приведенные соотношения упрощаются:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=\frac{\partial \Phi}{\partial x_p}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial \Phi}{\partial y_p}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}=\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z},\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}=\frac{\partial \Phi}{\partial t_p}+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}$$

Эти соотношения в дальнейшим используются для преобразования членов уравнений, содержащих производные от функций u,v,p,T.

Для преобразования выражения содержащих переменную p, запишем соотношения между старыми и новыми переменными так, чтобы в левых частях стояли производные по новым переменным x_p, y_p, p, t_p.:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_p}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_p}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_p}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_p}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_p}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_p}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_p},\quad z=H$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial p}=-g\frac{\partial H}{\partial x}+lv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\tau\frac{\partial v}{\partial p}=-\mathrm{g}\frac{\partial H}{\partial y}-l\mathrm{u}$$

$$T=-p\frac{\mathrm{g}}{R}\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial p}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=RT(\gamma_a-\gamma)\frac{1}{gp}$$

Уравнения гидротермодинамики, записанные в сигма- системе координат

Система координат (x,y,z,t) или (x,y,p,t) обладает тем недостатком, что поверхности земли не совпадает ни с уровнем *z=const*, ни с какой-либо поверхностного *p=const.* Это обстоятельство может вызвать затруднения при описании атмосферного движение в близи земной поверхности. В этом отношении определенным преимуществами обладает σ - система координат. В этой системе вертикальной координатой является

$$\sigma = \frac{p}{p_s}$$

p_s - давление на уровне поверхности земли, является переменной величиной. Другие координаты этой системы:

$$x_\sigma = x_p = x \qquad y_\sigma = y_p = y \qquad t_\sigma = t_p = t$$

В качестве функции координат и времени в этой системе будет функции u,v,T, $z = \mu(x_\sigma, y_\sigma, \sigma, t_\sigma)$ и функция

Уравнения гидротермодинамики, записанные в сигма- системе координат

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma}{\sigma t} + u\frac{\partial\sigma}{\partial x} + v\frac{\partial\sigma}{\partial y} + w\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{p_s}\right) = \frac{1}{p_s}\left(\frac{dp}{dt} - \frac{p}{p_s}\frac{dp_s}{dt}\right) = \frac{1}{p_s}\left(\tau - \sigma\frac{dp_s}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{p_s}\left(\tau - \sigma\left[\frac{\partial p_s}{\sigma t} + u\frac{\partial p_s}{\partial x} + v\frac{\partial p_s}{\partial y}\right]\right)$$

Связи между $\dot{\sigma}$ и τ можно получит также в виде:

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma p_s) = p_s\frac{d\sigma}{dt} + \sigma\frac{dp_s}{dt} = p_s\dot{\sigma} + \sigma\frac{dp_s}{dt}$$

Переход от p- системы к сигма системе можно осуществить с помощью правил дифференцирования сложных функции.

$$\frac{du}{dt} = -g\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\sigma}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \sigma} + lv \qquad \frac{dv}{dt} = -g\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\sigma}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial \sigma} - lu$$

$$T = -\frac{g}{R}\sigma\frac{\partial H}{\partial \sigma}$$

$$\frac{dp_s}{dt_\sigma} + \frac{\partial u p_s}{\partial x_p} + \frac{\partial v p_s}{\partial y_\sigma} + \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma} = 0 \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{c_p\rho}\frac{\theta}{T}\varepsilon$$

Основы математического моделирования атмосферных процессов, лектор ассоциированный профессор Маусумбекова Сауле Джумакановна

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите искомые переменные для р-системы координат;
2. Напишите формулу перехода от декартовой системы координат к р-системе координат;
3. Выпишите уравнения движения для р-системы координат;
4. Выпишите уравнения сохранения массы для р-системы координат;